

Το βιβλίο αυτό περιέχει όλη την ύλη των *Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου*, χωρισμένη σε ενότητες, όπως ακριβώς στο σχολικό βιβλίο.

Κάθε ενότητα περιλαμβάνει:

- Τη θεωρία
- Λυμένες ασκήσεις
- Χρήσιμες παρατηρήσεις
- Ασκήσεις για λύση
- Ερωτήσεις κατανόησης

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχουν γενικές ασκήσεις και **κριτήρια αξιολόγησης**.

Στο τέλος του βιβλίου, υπάρχουν οι λύσεις όλων των ασκήσεων και των ερωτήσεων κατανόησης του βιβλίου.

Κ. Τζιρώνης – Θ. Τζουβάρας  
Μαθηματικοί



**Α΄ ΜΕΡΟΣ • ΑΛΓΕΒΡΑ**

**Κεφάλαιο 0: ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**

<b>A.0.1</b>	Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου.....	9
<b>A.0.2</b>	Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών.....	13
<b>A.0.3</b>	Πρόσθεση ρητών αριθμών.....	20
<b>A.0.4</b>	Αφαίρεση ρητών αριθμών.....	26
<b>A.0.5</b>	Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών.....	32
<b>A.0.6</b>	Διαίρεση ρητών αριθμών.....	39
<b>A.0.7</b>	Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών.....	45
<b>A.0.8</b>	Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό.....	51
<b>A.0.9</b>	Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο.....	59
<b>A.0.10</b>	Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών.....	66

**Κεφάλαιο 1ο: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**

<b>A.1.1</b>	Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις.....	72
<b>A.1.2</b>	Εξισώσεις α΄ βαθμού.....	78
<b>A.1.3</b>	Επίλυση τύπων.....	88
<b>A.1.4</b>	Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων.....	92
<b>A.1.5</b>	Ανισώσεις α΄ βαθμού.....	97
	Γενικά θέματα 1ου κεφαλαίου.....	107

**Κεφάλαιο 2ο: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**

<b>A.2.1</b>	Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού.....	112
<b>A.2.2</b>	Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί.....	121
<b>A.2.3</b>	Προβλήματα.....	133
	Γενικά θέματα 2ου κεφαλαίου.....	136

**Κεφάλαιο 3ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

<b>A.3.1</b>	Η έννοια της συνάρτησης.....	139
<b>A.3.2α</b>	Καρτεσιανές συντεταγμένες.....	145
<b>A.3.2β</b>	Γραφική παράσταση συνάρτησης.....	156
<b>A.3.3</b>	Η συνάρτηση $y = ax$ .....	163
<b>A.3.4</b>	Η συνάρτηση $y = ax + \beta$ .....	171
<b>A.3.5</b>	Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ – Η υπερβολή.....	184
	Γενικά θέματα 3ου κεφαλαίου.....	189

**Κεφάλαιο 4ο: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

<b>A.4.1</b>	Βασικές έννοιες της στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα.....	193
<b>A.4.2-</b>	Γραφικές παραστάσεις –	
<b>A.4.3</b>	Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.....	196

<b>A.4.4</b>	Ομαδοποίηση παρατηρήσεων.....	211
<b>A.4.5</b>	Μέση τιμή – Διάμεσος.....	216
	Γενικά θέματα 4ου κεφαλαίου.....	224

## B΄ ΜΕΡΟΣ • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

### Κεφάλαιο 1ο: ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

<b>B.1.1</b>	Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας.....	231
<b>B.1.2</b>	Μονάδες μέτρησης επιφανειών.....	234
<b>B.1.3</b>	Εμβαδά επίπεδων σχημάτων.....	237
<b>B.1.4</b>	Πυθαγόρειο θεώρημα.....	248
	Γενικά θέματα 1ου κεφαλαίου.....	256

### Κεφάλαιο 2ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

<b>B.2.1</b>	Εφαπτομένη οξείας γωνίας.....	261
<b>B.2.2.</b>	Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας.....	269
<b>B.2.3</b>	Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης.....	280
<b>B.2.4</b>	Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $30^\circ$ , $45^\circ$ και $60^\circ$ .....	287
<b>B.2.5</b>	Η έννοια του διανύσματος.....	295
<b>B.2.6</b>	Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων.....	302
<b>B.2.7</b>	Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες.....	311
	Γενικά θέματα 2ου κεφαλαίου.....	315

### Κεφάλαιο 3ο: ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

<b>B.3.1</b>	Εγγεγραμμένες γωνίες.....	321
<b>B.3.2.</b>	Κανονικά πολύγωνα.....	330
<b>B.3.3</b>	Μήκος κύκλου.....	336
<b>B.3.4</b>	Μήκος τόξου.....	341
<b>B.3.5</b>	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου.....	351
<b>B.3.6</b>	Εμβαδόν κυκλικού τομέα.....	357
	Γενικά θέματα 3ου κεφαλαίου.....	364

### Κεφάλαιο 4ο: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

<b>B.4.1</b>	Ευθεία και επίπεδα στο χώρο.....	369
<b>B.4.2.</b>	Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου.....	376
<b>B.4.3</b>	Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου.....	380
<b>B.4.4</b>	Η πυραμίδα και τα στοιχεία της.....	386
<b>B.4.5</b>	Ο κώνος και τα στοιχεία του.....	391
<b>B.4.6</b>	Η σφαίρα και τα στοιχεία της.....	396
<b>B.4.7</b>	Γεωγραφικές συντεταγμένες.....	401
	Γενικά θέματα 4ου κεφαλαίου.....	403

## ΘΕΩΡΙΑ

## 1 Βασικά σύμβολα

Για τους αριθμούς  $a$  και  $\beta$  έχουμε τα παρακάτω σύμβολα.

Σύμβολα	Σημασία
$a > \beta$	Ο $a$ είναι μεγαλύτερος από τον $\beta$
$a < \beta$	Ο $a$ είναι μικρότερος από τον $\beta$
$a > 0$	Ο $a$ είναι μεγαλύτερος από το 0 (θετικός)
$a < 0$	Ο $a$ είναι μικρότερος από το 0 (αρνητικός)
$a \geq \beta$	Ο $a$ είναι μεγαλύτερος από τον $\beta$ ή ίσος με τον $\beta$
$a \leq \beta$	Ο $a$ είναι μικρότερος από τον $\beta$ ή ίσος με τον $\beta$
$a \geq 0$	Ο $a$ είναι μεγαλύτερος από το 0 ή ίσος με το 0 (θετικός ή μηδέν)
$a \leq 0$	Ο $a$ είναι μικρότερος από το 0 ή ίσος με το 0 (αρνητικός ή μηδέν)

## 2 Ιδιότητες

- 1.
- Αν  $a > \beta$ , τότε  $a + \gamma > \beta + \gamma$  και  $a - \gamma > \beta - \gamma$ .
  - Αν  $a < \beta$ , τότε  $a + \gamma < \beta + \gamma$  και  $a - \gamma < \beta - \gamma$ .

Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

Αν από τα δύο μέλη μιας ανισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

- 2.
- Αν  $a > \beta$  και  $\gamma > 0$ , τότε  $a\gamma > \beta\gamma$  και  $\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ .
  - Αν  $a < \beta$  και  $\gamma > 0$ , τότε  $a\gamma < \beta\gamma$  και  $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ .
  - Αν  $a > \beta$  και  $\gamma < 0$ , τότε  $a\gamma < \beta\gamma$  και  $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ .
  - Αν  $a < \beta$  και  $\gamma < 0$ , τότε  $a\gamma > \beta\gamma$  και  $\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ .

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αριθμό  $\gamma$ , τότε:  
 αν ο  $\gamma$  είναι θετικός, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς, ενώ,  
 αν ο  $\gamma$  είναι αρνητικός, προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς.

### 3 Ανίσωση - Λύση ανίσωσης - Αδύνατη ανίσωση

- Μία ανισότητα που περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές (που λέγονται και άγνωστοι) λέγεται **ανίσωση**. Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με ανισώσεις που έχουν ένα μόνο άγνωστο.
- Έστω ότι έχουμε μια ανίσωση που έχει ένα μόνο άγνωστο, έστω  $x$ . Αν αντικαταστήσουμε στην ανίσωση το  $x$  με έναν αριθμό που προκύπτει ανισότητα που ισχύει, τότε λέμε ότι ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης ή ότι επαληθεύει την ανίσωση. Για παράδειγμα, αν έχουμε την ανίσωση  $2x > 6$ , τότε ο αριθμός 4 είναι λύση, ενώ ο αριθμός 3 δεν είναι λύση της ανίσωσης αυτής, αφού ισχύει  $2 \cdot 4 > 6$ , ενώ δεν ισχύει  $2 \cdot 3 > 6$ .
- Μια ανίσωση λέγεται **αδύνατη** αν δεν έχει καμία λύση (όπως π.χ. η ανίσωση  $0 \cdot x > 2$ ).
- Οι έννοιες «πρώτο μέλος», «δεύτερο μέλος», «άγνωστοι όροι», «γνωστοί όροι», «επίλυση» μιας ανίσωσης ορίζονται όπως και στις εξισώσεις.

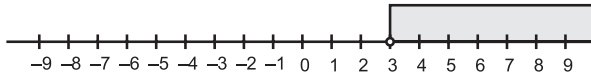
## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 4 Να λύσετε την ανίσωση  $5x - 2 > 3x + 4$  και να παραστήσετε τις λύσεις πάνω σε έναν άξονα.

### ΛΥΣΗ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΛΥΣΗΣ	ΛΥΣΗ
Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους	$5x - 3x > 4 + 2$
Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων	$2x > 6$
Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου. Ο συντελεστής αυτός είναι ο <b>θετικός</b> αριθμός 2 και γι' αυτό δεν αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης	$\frac{2x}{2} > \frac{6}{2}$
Κάνουμε τις απλοποιήσεις	$x > 3$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$  μεγαλύτερη από 3 είναι λύση της ανίσωσης. Οι λύσεις της ανίσωσης παριστάνονται ως εξής πάνω σε έναν άξονα.



Ο κύκλος στο σημείο που παριστάνει το 3 δηλώνει ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι λύση της ανίσωσης.

**5** Να λύσετε την ανίσωση  $10 - (x + 2) > 5(x + 4)$ .

**ΛΥΣΗ**

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΛΥΣΗΣ	ΛΥΣΗ
Απαλείφουμε τις παρενθέσεις	$10 - x - 2 > 5x + 20$
Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους	$-x - 5x > -10 + 2 + 20$
Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων	$-6x > 12$
Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου που είναι ο <b>αρνητικός</b> αριθμός $-6$ και γι' αυτό αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης	$\frac{-6x}{-6} < \frac{12}{-6}$
Κάνουμε τις απλοποιήσεις	$x < -2$

**6** Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x+15}{12} - \frac{x-6}{24} \geq -\frac{x}{3}$ .

**ΛΥΣΗ**

Οι παρονομαστές είναι 12, 24, 3 και έχουν ΕΚΠ το 24.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΛΥΣΗΣ	ΛΥΣΗ
Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με το 24	$24 \cdot \frac{x+15}{12} - 24 \cdot \frac{x-6}{24} \geq -24 \cdot \frac{x}{3}$
Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών	$2(x+15) - (x-6) \geq -8x$
Βγάζουμε τις παρενθέσεις	$2x+30 - x+6 \geq -8x$
Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους	$2x - x + 8x \geq -30 - 6$
Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων	$9x \geq -36$
Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου. Ο συντελεστής αυτός είναι ο <b>θετικός</b> αριθμός 9 και έτσι δεν αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης	$\frac{9x}{9} \geq -\frac{36}{9}$
Κάνουμε τις απλοποιήσεις	$x \geq -4$

**7** Να λύσετε την ανίσωση  $12 - 5x < 5(2 - x)$ .

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε διαδοχικά:  $12 - 5x < 5(2 - x)$   
 $12 - 5x < 10 - 5x$   
 $-5x + 5x < 10 - 12$   
 $0x < -2$

Η ανίσωση αυτή είναι **αδύνατη** αφού, για κάθε αριθμό  $x$ , το πρώτο μέλος της είναι ίσο με 0, άρα δεν μπορεί να είναι μικρότερο του  $-2$ .

**8** Να λύσετε την ανίσωση  $6 - 5x < 5(2 - x)$ .

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε διαδοχικά:  $6 - 5x < 5(2 - x)$   
 $6 - 5x < 10 - 5x$   
 $-5x + 5x < 10 - 6$   
 $0x < 4$

Η ανίσωση αυτή επαληθεύεται από κάθε αριθμό  $x$  (είναι δηλαδή μία **ταυτότητα**) αφού, για κάθε αριθμό  $x$ , το πρώτο μέλος της είναι ίσο με 0, άρα μικρότερο του 4.

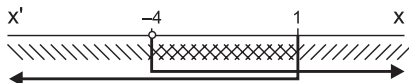
**9** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:  
 $2x - 4 < 5x + 8$  και  $3(2x - 1) \leq 2x + 1$ .

**ΛΥΣΗ**

Λύνουμε πρώτα καθεμία ανίσωση χωριστά και έχουμε:

$2x - 4 < 5x + 8$	$3(2x - 1) \leq 2x + 1$
$2x - 5x < 4 + 8$	$6x - 3 \leq 2x + 1$
$-3x < 12$	$6x - 2x \leq 3 + 1$
$\frac{-3x}{-3} > \frac{12}{-3}$	$4x \leq 4$
$x > -4$	$\frac{4x}{4} \leq \frac{4}{4}$
	$x \leq 1$

Σχεδιάζουμε τώρα και τις δύο παραπάνω λύσεις σ' έναν άξονα:



Το τμήμα του άξονα που έχει «διπλή» γραμμοσκίαση είναι το ζητούμενο. Επομένως  $-4 < x \leq 1$ .



**10** Αν  $\alpha < \beta$ , να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α)  $A = 2\alpha - 1$  και  $B = 2\beta - 1$     β)  $\Gamma = -2\alpha + 4$  και  $\Delta = -2\beta + 4$

**ΛΥΣΗ**

α)  $\alpha < \beta$   
 $2\alpha < 2\beta$   
 $2\alpha - 1 < 2\beta - 1$   
 $A < B$

β)  $\alpha < \beta$   
 $-2\alpha > -2\beta$   
 $-2\alpha + 4 > -2\beta + 4$   
 $\Gamma > \Delta$

**11** Αν  $\alpha < \beta < \gamma$ , να βρείτε το πρόσημο του αριθμού  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$ .

**ΛΥΣΗ**

Αφού  $\alpha < \beta$ , θα είναι  $\alpha - \beta < 0$ , δηλαδή ο αριθμός  $\alpha - \beta$  είναι αρνητικός.  
 Αφού  $\beta < \gamma$ , θα είναι  $\beta - \gamma < 0$ , δηλαδή ο αριθμός  $\beta - \gamma$  είναι αρνητικός.  
 Επομένως ο αριθμός  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)$  είναι θετικός (ως γινόμενο δύο αρνητικών),  
 δηλαδή  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) > 0$ .  
 (-) · (-)

**ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

**12** Οι θετικοί αριθμοί και ο 0 λέγονται **μη αρνητικοί** πραγματικοί αριθμοί. Για να δηλώσουμε ότι ένας πραγματικός αριθμός  $x$  είναι μη αρνητικός, γράφουμε  $x \geq 0$ .

**13** Μερικές φορές, για να δηλωθεί ότι ένας αριθμός  $x$  είναι θετικός ( $x > 0$ ), σε αντιδιαστολή με το ότι ο  $x$  είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός ( $x \geq 0$ ), χρησιμοποιείται η έκφραση «ο  $x$  είναι αυστηρά θετικός» αντί της «ο  $x$  είναι θετικός». Πρέπει να τονιστεί ότι οι δύο αυτές εκφράσεις έχουν το ίδιο ακριβώς νόημα [η λέξη «αυστηρά» μπαίνει μόνο για έμφαση και δεν προσθέτει κάτι, οπότε μπορεί να παραλειφθεί δίχως βλάβη].

**14** Για να λύσουμε μια ανίσωση, συνήθως εργαζόμαστε όπως σε μια εξίσωση, μόνο που στο τέλος, αν διαιρέσουμε τα μέλη με το συντελεστή του αγνώστου και αυτός είναι αρνητικός, πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης.

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

**15.** Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις με Σ, αν είναι σωστή, ή με Λ, αν είναι λανθασμένη.

α) Όταν γράφουμε  $\alpha < \beta$ , εννοούμε ότι ο αριθμός  $\alpha$  είναι μικρότερος του  $\beta$ .

Σ Λ





στ) Αν  $a > \beta$  και  $\gamma < 0$ , τότε  $a \cdot \gamma \dots \beta \cdot \gamma$  και  $\frac{a}{\gamma} \dots \frac{\beta}{\gamma}$ .

20. Να συμπληρώσετε τα κενά:

- α) Αν  $x < 2$ , τότε  $x + 2 < \dots$       β) Αν  $x < 6$ , τότε  $x - 4 > \dots$   
 γ) Αν  $x < -4$ , τότε  $\frac{x}{3} < \dots$       δ) Αν  $x \leq 5$ , τότε  $\frac{x}{-5} \geq \dots$   
 ε) Αν  $x \geq -3$ , τότε  $4x \geq \dots$       στ) Αν  $x < 9$ , τότε  $\frac{2x}{3} < \dots$   
 ζ) Αν  $x < -1$ , τότε  $-3x > \dots$       η) Αν  $x \geq -\frac{3}{2}$ , τότε  $-6x \leq \dots$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- α)  $5x > 10$       β)  $4x > -12$       γ)  $-6x < 18$       δ)  $-2x < -10$

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- α)  $12x > 0$       β)  $5x < 0$       γ)  $-2x < 0$       δ)  $-3x > 0$   
 ε)  $\frac{x}{8} < 0$       στ)  $\frac{x}{-4} < 0$       ζ)  $\frac{x}{-2} > 0$       η)  $\frac{x}{-6} > 0$

23. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- α)  $-x > 0$       β)  $-x < 0$       γ)  $-x > 1$       δ)  $-x > 2$   
 ε)  $-x > -2$       στ)  $-x < -3$

24. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- α)  $0x > 2$       β)  $0x < 2$       γ)  $0x > 0$       δ)  $0x < 0$   
 ε)  $0x > -3$       στ)  $0x < -3$

25. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- α)  $0x \geq 2$       β)  $0x \leq 2$       γ)  $0x \geq 0$       δ)  $0x \leq 0$   
 ε)  $0x \geq -3$       στ)  $0x \leq -3$

26. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους.

- α)  $4x + 3 \leq 7 + 2x$       β)  $x + 4 > -1$       γ)  $-(2-x) > 2x - 2$       δ)  $-5x + 2 \leq 3 - x$

27. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους.

- α)  $3(x-2) > x-3$       β)  $2\omega + 4 - (\omega - 1) \geq 3 - \omega$   
 γ)  $3y - 4 - (y + 1) < 2(y + 1) + 1$       δ)  $4(t + 4) < t - 5$

28. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στην ευθεία των αριθμών.

- α)  $2(x-2) - 3x \leq 4(x+1) + 12$       β)  $2(5-x) + x + 2 \geq 8x$

29. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α)  $5(x-2) - 2(x-1) < 2(x+1) - (4-x)$       β)  $-(x-10) + 2(3-x) > 5(x-2) + 8(5-x)$

30. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α)  $3(x+1) - \frac{5}{2}(x+1) > \frac{x}{2}$       β)  $2x - 3(x+1) < 4(x+2) - 5(x-1)$

γ)  $x+3+2(x-4) > 3(x-1) - 1$

31. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α)  $\frac{x+6}{10} > \frac{x-1}{9}$       β)  $\frac{x-2}{4} > x+1$       γ)  $1 - \frac{5-x}{3} < x$

32. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α)  $2x - 20 + \frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} > 0$       β)  $\frac{1}{2} \left( \frac{x+2}{2} + \frac{x+2}{3} \right) - \frac{x+2}{6} > 3$

γ)  $y - \frac{y-3}{2} < \frac{y-2}{2} - \frac{y}{4} + 2$       δ)  $t + \frac{t-3}{4} + 1 < \frac{3t-1}{5} + \frac{19t}{20}$

ε)  $a+6 - \frac{a+4}{2} > \frac{a+5}{2} - \frac{a+3}{4}$

33. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α)  $\frac{x-15}{2} + \frac{x-3}{2} + \frac{3}{4} > x-3$       β)  $\frac{\frac{x}{2}-2}{2} - \frac{x-1}{5} < \frac{x}{20} - \frac{2}{5}$

γ)  $x-1 + \frac{x+3}{2} \leq 3 \frac{x-1}{2} + 2$

34. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων  $3x-2 \leq x+4$  και  $2 < 12+5x$ . Στη συνέχεια να παραστήσετε τις λύσεις αυτές στην ευθεία των αριθμών.

35. Ομοίως για τις ανισώσεις:

α)  $3x-2 \geq x+4$  και  $6x+12 > 0$       β)  $3x-2 \leq x+4$  και  $5x+10 < 0$

γ)  $3x-2 \geq x+4$  και  $4 > 12+4x$       δ)  $x-3 < 1$  και  $1-x < 3$

36. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α)  $2x+2(x-1) > 7-x$  και  $7x-12 > 3(x+2)+10$       β)  $4x-1 > 3(1-x)+8$  και  $4 \leq 2(1-x)$

γ)  $3\omega - 18 > \frac{2}{5}(\omega + 1)$  και  $\frac{1}{3}\omega + \frac{37}{21} < \frac{2}{3}\omega - 3$

37. Ομοίως:

α)  $2x-2 < 8$  και  $3(x-2) > -6$  και  $3(x-3) \leq x-1$

β)  $\frac{3x-7}{2} > \frac{2x-3}{3}$  και  $7(x-2)-2 > -2(x+3)-1$  και  $1+x < 2(x-5)$

38. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων  $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{4} > -\frac{1}{2}$  και  $5x-3 < x+5$  και  $2x-1 \leq 3x+1$ .



53. Η αντοχή μιας γέφυρας είναι 12t. Ένα φορτηγό με απόβαρο 4 t θα περάσει από τη γέφυρα μεταφέροντας σωλήνες που ο καθένας ζυγίζει 250 kg. Πόσους το πολύ σωλήνες μπορεί να μεταφέρει το φορτηγό αν ο οδηγός του ζυγίζει 75 kg;
54. Ο Βαγγέλης είχε τετραπλάσια χρήματα από το Γιώργο. Αν ο Βαγγέλης ξοδέψει 23 € και δώσουμε στο Γιώργο 7 €, τότε ο Γιώργος θα έχει περισσότερα από το Βαγγέλη. Να εξετάσετε αν τα χρήματα που είχε αρχικά ο Γιώργος τού φτάνουν για να αγοράσει ένα περιοδικό που κοστίζει 10 €.
55. Η Γεωργία έχει ξοδέψει τα δύο προηγούμενα Σαββατοκύριακα 16 € και 14 €. Πόσα πρέπει να ξοδέψει αυτό το Σαββατοκύριακο για να έχει μέσο όρο εξόδων κάτω από 14 €;
56. Αν αυξήσουμε το τριπλάσιο ενός ακεραίου κατά 12, τότε προκύπτει αριθμός μεταξύ του 2 και του 16. Ποιος μπορεί να είναι ο ακέραιος;
57. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς που βρίσκονται μεταξύ του 38 και του 53, οι οποίοι, όταν διαιρεθούν με το 6, αφήνουν υπόλοιπο 3.
58. Σε πόλη, για να κινηθεί ένας επιβάτης με τα μέσα μαζικής μεταφοράς για ένα μήνα, έχει δύο επιλογές:
- αγοράζοντας κάρτα απεριορίστων διαδρομών με κόστος 38 € ή
  - πληρώνοντας εισιτήριο σε κάθε διαδρομή αξίας 0,8 €.
- Πόσες το πολύ διαδρομές πρέπει να κάνει ένας επιβάτης σε ένα μήνα για να μη συμφέρει η κάρτα απεριορίστων διαδρομών;
59. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 60 μέτρα, περίμετρο μεγαλύτερη από 184 μέτρα και εμβαδόν μικρότερο από 2400 τετραγωνικά μέτρα. Πόσα μέτρα μπορεί να είναι το πλάτος του;

## ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  αριθμοί τέτοιοι ώστε  $\alpha + \beta + \gamma = 20$  και  $3\alpha + 2\beta + 3\gamma = 60$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = (2\alpha + \beta + 2\gamma) \cdot (4\alpha + 3\beta + 4\gamma)$ .

(Διαγωνισμός ΕΜΕ)

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\frac{3(x-3)}{4} + \frac{5(x+2)}{6} + x - 1 = \frac{2(x+5)}{3} + \frac{3x-2}{2}$

β)  $\frac{y}{3} - \frac{7y}{6} - \frac{5}{6} = \frac{3y}{2} + \frac{5y}{3} - \frac{7}{6}$       γ)  $\frac{\omega-2}{4} + 6 = \frac{\omega-1}{3} + \frac{\omega}{2}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\frac{3x}{2} = x + \frac{x-4}{2} + 2$       β)  $-\frac{x}{4} + \frac{5x+12}{4} = 3 + x$

γ)  $\frac{x-2}{3} - \frac{x+4}{12} = \frac{x}{4}$       δ)  $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{x+2}{2}$

4. Αν για τους αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύουν  $\alpha + \beta = 2$  και  $\alpha + \beta + 2\gamma = 22$ :

α) Να βρείτε την τιμή του  $\gamma$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\alpha(x+1) = (\gamma-\beta)x + 18 - \beta$ .

5. Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  η εξίσωση  $\alpha x + 2 = \beta - 3x$  (με άγνωστο  $x$ ) είναι ταυτότητα;

6. Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = 4 \cdot (3-1)$ ,  $\beta = 5 - 4 \cdot (4-3)$ ,  $\gamma = 10\beta$ .

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\gamma + x = \alpha - 2$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{\gamma-10}{x} = x - 2010$  (με  $x \neq 0$ ).

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α)  $\frac{2(\omega-2)}{3} + \frac{3(\omega+1)}{2} - 1 \geq \frac{\omega}{2} + \frac{\omega+1}{3}$       β)  $\frac{x-2}{3} - \frac{3x+5}{4} \geq \frac{x}{2} - x + \frac{1}{2}$

8. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$\frac{x-2}{4} + \frac{x-4}{6} - \frac{x-2}{8} \geq 0$  και  $x - \frac{x}{6} > 1$ .

9. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς  $x$  που είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$\frac{2(x-1)}{3} + 3 \geq x - \frac{2(x-3)}{3}$  και  $\frac{2x}{3-1} > \frac{3x}{4} - \frac{3}{2}$ .

10. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$\frac{x-11}{6} < \frac{x+5}{4} - \frac{x-8}{3}$  και  $\frac{x+9}{3} + \frac{x+5}{5} > \frac{x-7}{10}$

και  $\frac{x-4}{5} \leq \frac{8x-5}{9} - \frac{x-3}{6}$ .

11. Ο κύριος Θανάσης πούλησε συνολικά 166 αυγά στη λαϊκή αγορά και εισέπραξε 63,43 €. Από τα αυγά αυτά, κάποια πούλησε με 0,37 € το ένα και τα υπόλοιπα με 0,40 € το ένα. Πόσα αυγά πούλησε με 0,37 € το ένα;
12. Να βρεθεί ο αριθμός του οποίου το διπλάσιο, αν αυξηθεί κατά 4, είναι ίσο με το τριπλάσιό του ελαττωμένο κατά 17.
13. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι 10 m και 6 m. Αν αυξήσουμε τη μια πλευρά του από 10 m σε 15 m, πόσο πρέπει να αυξηθεί η άλλη ώστε το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου να είναι διπλάσιο του αρχικού;
14. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς των οποίων το διπλάσιο, αυξημένο κατά 6, είναι μεγαλύτερο από το τριπλάσιό τους και μικρότερο από το τετραπλάσιό τους.
15. Σε ένα διψήφιο αριθμό, τα ψηφία του είναι διαδοχικοί (φυσικοί) αριθμοί, με μεγαλύτερο το ψηφίο των μονάδων. Να βρείτε τον αριθμό αν γνωρίζετε ότι ισούται με το πενταπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων του αυξημένο κατά 3.
16. Ο Βαγγέλης είχε σκοπό να αγοράσει 10 στίλο. Επειδή όμως του έκαναν έκπτωση 20 λεπτά στο κάθε στίλο, αγόρασε με τα ίδια χρήματα 12 στίλο. Πόσα χρήματα έδωσε;
17. Ο Χρήστος μπορεί να κατασκευάσει έναν τοίχο από γυψοσανίδες μόνος του αν δουλέψει 10 ώρες. Ο Βαγγέλης μόνος του κατασκευάζει τον ίδιο τοίχο σε 12 ώρες. Αν δουλέψουν και οι δύο μαζί, τότε η εργασία τους μειώνεται σε απόδοση κατά 1 τετραγωνικό μέτρο την ώρα, τελειώνουν όμως τον τοίχο σε 6 ώρες. Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι ο τοίχος.
18. Σε ένα γυμνάσιο η Β' τάξη ετοιμάζει μια εκδρομή. Δύο γραφεία παρέχουν εκδρομικά λεωφορεία με τις εξής προσφορές:  
 Γραφείο 1ο: 300 € και 1,20 € το χιλιόμετρο.  
 Γραφείο 2ο: 390 € και 0,90 € το χιλιόμετρο.  
 Να εξετάσετε πόσα τουλάχιστον χιλιόμετρα πρέπει να κάνει το λεωφορείο για να συμφέρει η προσφορά του 2ου γραφείου.
19. Ο Πέτρος έχει κάποιες σελίδες κενές στο άλμπουμ και θέλει να τοποθετήσει ένα συγκεκριμένο αριθμό φωτογραφιών. Αν σε κάθε σελίδα βάλει από δύο φωτογραφίες, τότε περισσεύουν 11, αν σε κάθε σελίδα βάλει από 3 φωτογραφίες, τότε περισσεύουν 2. Να βρείτε πόσες είναι οι κενές σελίδες και πόσες οι φωτογραφίες.
20. Αν ο αριθμός  $x$  είναι θετικός ακέραιος και το κλάσμα  $\frac{3-x}{2}$  είναι αριθμός αρνητικός και μεγαλύτερος του  $-1$ , να βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους των οποίων το άθροισμα των ψηφίων τους ισούται με  $x$ .

(Διαγωνισμός ΕΜΕ)

21. Ένας επιστήμονας και ο βοηθός του ανέλαβαν μία έρευνα σε χημικό εργαστήριο, από την οποία θα εισπράξουν 85.116 €. Ο επιστήμονας θα απασχοληθεί για 43 μέρες



και ο βοηθός του για 45 ημέρες. Η ημερήσια αμοιβή του επιστήμονα είναι κατά 40% μεγαλύτερη της ημερήσιας αμοιβής του βοηθού του.  
Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο καθένας στο τέλος της ημέρας;

(Διαγωνισμός ΕΜΕ)

22. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5^2 - 3^0 + x}{[1 - (-1)^{2009}]^0}, \quad B = \frac{[(-2)^3 + (-1)^3]}{9 + \frac{x}{2}}.$$

Αν είναι  $A = 6B$ , να προσδιορίσετε την τιμή του  $x$ .

(Διαγωνισμός ΕΜΕ)

23. Ένας αθλητής θέλει να αγοράσει δύο βιβλία. Το βιβλίο Α κοστίζει 60% των χρημάτων (ευρώ) που έχει μαζί του, ενώ το βιβλίο Β κοστίζει το 44% των χρημάτων που έχει μαζί του. Αν είχε 80 λεπτά περισσότερα, τότε θα είχε ακριβώς τα χρήματα που κοστίζουν και τα δύο βιβλία μαζί.

Να βρείτε πόσα χρήματα κοστίζει καθένα από τα δύο βιβλία.

(Διαγωνισμός ΕΜΕ)

## 1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 1ο

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	A	B	Γ	Δ
i) Η παράσταση $4x - 2x + 7x + x$ είναι ίση με:	$14x$	$-10x$	$10x$	$8x$
ii) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $4x > 8$ και $3x \leq 9$ είναι:	$2 < x \leq 3$	$3 \leq x < 2$	$x > 2$	$x \leq 3$
iii) Η εξίσωση $x = x + 1$	είναι ταυτότητα	είναι αδύνατη	έχει λύση τον αριθμό 1	έχει λύση τον αριθμό -1
iv) Η ανίσωση $5x - 2x > 3x$	έχει λύσεις $x < 0$ μόνο	έχει λύση κάθε αριθμό	έχει λύση $x \geq 0$ μόνο	είναι αδύνατη
v) Ο τύπος $u = u_0 + at$ λύνεται ως προς $t$ και δίνει:	$t = a(u - u_0)$	$t = \frac{u + u_0}{a}$	$t = \frac{u - u_0}{a}$	$t = \frac{u_0 - u}{a}$

## ΘΕΜΑ 2ο

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις με Σ, αν είναι σωστή, ή με Λ, αν είναι λανθασμένη.

α) Αν  $a = \beta$ , τότε  $a + \gamma = \beta + \gamma$ .

β) Αν  $a < \beta$ , τότε  $\gamma - a < \gamma - \beta$ .

γ) Αν  $a < \beta$  και  $\gamma < 0$ , τότε  $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ .

δ) Αν  $2x = 0$ , τότε  $x = 0$ .

Σ Λ

## ΘΕΜΑ 3ο

α) Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = x + \frac{7}{3}$ .

β) Να λύσετε την ανίσωση  $3x > 2(x + 3)$ .

γ) Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης.

## ΘΕΜΑ 4ο

Να βρείτε τις λύσεις της διπλής ανίσωσης  $\frac{x-1}{3} + 2 \leq x \leq \frac{4-x}{2}$ .

## ΘΕΜΑ 5ο

Ο κύριος Παύλος θα πωλούσε στη λαϊκή αγορά όσα αυγά είχε με 18 λεπτά το ένα. Επειδή όμως έσπασαν τα 25 αυγά, πούλησε τα υπόλοιπα με 21 λεπτά το ένα και εισέπραξε το ίδιο ακριβώς ποσό. Πόσα αυγά πούλησε;

## 2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	Α	Β	Γ	Δ
<b>i)</b> Η παράσταση $5x - 3x + 7x + 2x$ είναι ίση με:	11x	- 11x	17x	7x
<b>ii)</b> Οι ανισώσεις $5x \geq 15$ και $3x < 12$ έχουν κοινές λύσεις:	$4 < x \leq 3$	$x \geq 3$	$3 \leq x < 4$	$x < 4$
<b>iii)</b> Η εξίσωση $2x + 3 = x$	είναι αδύνατη	έχει λύση $x = -3$	έχει λύση $x = 3$	είναι ταυτότητα
<b>iv)</b> Η ανίσωση $2x - 2x \geq -3x$	έχει λύση μόνο νο φυσικούς	έχει λύση μόνο ακέραιους	είναι αδύνατη	έχει λύση κάθε αριθμό
<b>v)</b> Ο τύπος $u = u_0 + at$ , αν λυθεί ως προς $a$ , δίνει	$a = \frac{u + u_0}{t}$	$a = \frac{u - u_0}{t}$	$a = \frac{u_0 + u}{t}$	$a = (u_0 - u)t$

### ΘΕΜΑ 2ο

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις με Σ, αν είναι σωστή, ή με Λ, αν είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $a = \beta$ , τότε  $a - \gamma = \beta - \gamma$ .

**β)** Αν  $a < \beta$ , τότε  $2\gamma + a < 2\gamma + \beta$ .

**γ)** Αν  $a > \beta$  και  $\gamma < 0$ , τότε  $\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ .

**δ)** Αν  $-2x = 0$ , τότε  $x = 2$ .

Σ Λ

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### ΘΕΜΑ 3ο

**α)** Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{x+1}{3} = \frac{2-x}{2}$ . **β)** Να λύσετε την ανίσωση  $\frac{x+2}{3} \leq x+1$ .

**γ)** Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης.

### ΘΕΜΑ 4ο

Να βρείτε τις λύσεις της διπλής ανίσωσης  $\frac{x+2}{3} - 1 \leq x \leq \frac{1-x}{2} - 1$ .

### ΘΕΜΑ 5ο

Για να πληρωθούν τα έξοδα της εκδρομής ενός τμήματος της Β' γυμνασίου, κάθε μαθητής θα πλήρωνε 3 €. Επειδή όμως δεν ήρθαν 5 μαθητές, οι υπόλοιποι πλήρωσαν από 3,75 € ο καθένας. Πόσοι μαθητές έλαβαν μέρος στην εκδρομή;